Problemi di controllo distribuito per sistemi spazio invarianti

Gianni Bianchini

Siena, 22 Gennaio 2002

SOMMARIO

- Introduzione. Sistemi spazio-temporali complessi
- Modelli lineari distribuiti
- Invarianza spaziale
  - Implicazioni per l'analisi e il controllo
- Problemi di controllo ottimo quadratico
- Struttura dei controllori ottimi
  - Decentralizzazione
  - Prestazioni vs. complessità
- Controllo ottimo con requisiti sulla struttura
  - Sintesi $\mathcal{H}_2$ con vincoli di comunicazione
- Conclusione
  - Da fare...

INTRODUZIONE

- Sistemi spazialmente distribuiti
  - Strutture flessibili
  - Problemi di fluidodinamica
  - Processi chimici
  - Propagazione
  - Linee di produzione
  - Code di autoveicoli
- Controllo
  - Approssimazioni finito-dimensionali (ingressi/uscite molto ampi)
  - Sensori/attuatori localizzati e in numero non elevato (limitazioni tecnologiche)
- MEMS
  - Dispositivi microscopici con funzionalità integrate: sensore/attuatore/comunicazione
    $\Rightarrow$ Possibilità di controllo totalmente distribuito
- Problemi
  - Algoritmi di controllo con obiettivi globali
  - Realizzabilità mediante strutture distribuite e con ragionevole onere computazionale

SISTEMI LINEARI DISTRIBUITI

- Struttura del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= [A\psi](x,t) + [Bu](x,t) \\ y(x,t) &= [C\psi](x,t) + [Du](x,t) \end{aligned}$$

$$(x,t) \in \mathbb{G} \times \mathbb{R}^+$$

dove

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \times \ldots \times \mathbb{G}_d$$

- A, B, C, D operatori tempo-invarianti tra spazi di funzioni definite su $\mathbb{G}$ di dimensioni appropriate

- $\mathbb{G}_i$ dipendono anche dalle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} &\mathbb{G}_i = \mathbb{R} && \text{(dominio continuo infinito)} \\ &\mathbb{G}_i = \partial\,\mathbb{D} && \text{(dominio continuo, c.c. periodiche)} \\ &\mathbb{G}_i = \mathbb{Z} && \text{(dominio discreto infinito)} \\ &\mathbb{G}_i = \mathbb{Z}_p && \text{(dominio discreto c.c. periodiche)} \end{aligned}$$

- Es.

$$\mathbb{G} = \partial\,\mathbb{D} \times \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \text{cilindro}$$

- Eventualmente t discreto

INVARIANZA SPAZIALE

- Spazio delle funzioni complesse $\mathcal{L}_2$-integrabili su $\mathbb{G}$ (con opportuna misura)

$$\mathcal{L}_2^n(\mathbb{G}) = \left\{ f : \mathbb{G} \to \mathbb{C} \quad : \quad \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{G}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

- Operatore traslazione per funzioni in $\mathcal{L}_2(\mathbb{G})$

$$[T_{x_0} f] = f(x - x_0)$$

- Operatore invariante per traslazione

$$T_x A = A T_x \quad \forall T_x$$

  - Derivata rispetto allo spazio

$$A : f(x) \to \frac{\partial f}{\partial x}$$

  - Convoluzione spaziale

$$\mathbf{H} : f \to \int_{\mathbb{G}} H_{x-\xi} f(\xi) d\xi$$

INVARIANZA SPAZIALE

- Trasformata generalizzata di Fourier

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}\{f(x)\}$$

$$x \in \mathbb{G} \quad ; \quad \lambda \in \hat{\mathbb{G}} \quad ; \quad f(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{G}) \quad ; \quad \hat{f}(\lambda) \in \mathcal{L}_2(\hat{\mathbb{G}})$$

$\mathbb{G}$	$\hat{\mathbb{G}}$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Trasf. di F.
$\partial\,\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}$	Serie di F.
$\mathbb{Z}$	$\partial\,\mathbb{D}$	Trasf. Z
$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$	D.F.T.

  – Isometria $\mathcal{L}_2(\mathbb{G}) \to \mathcal{L}_2(\hat{\mathbb{G}})$

$$\Downarrow$$

$$A : \mathcal{L}_2(\mathbb{G}) \to \mathcal{L}_2(\mathbb{G}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = \mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{L}_2(\hat{\mathbb{G}}) \to \mathcal{L}_2(\hat{\mathbb{G}})$$

Teorema. Se A è un operatore invariante per traslazione, il corrispondente $\hat{A}$ è un operatore moltiplicativo

$$[\hat{A}\hat{f}(\lambda)] = \hat{A}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

MODELLI DI STATO
SPAZIO INVARIANTI

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= [A\psi](x,t) + [Bu](x,t) \\
y(x,t) &= [C\psi](x,t) + [Du](x,t)
\end{aligned}
$$

$$\psi \in \mathcal{L}_2^n(\mathbb{G}) \quad ; \quad u \in \mathcal{L}_2^p(\mathbb{G}) \quad ; \quad y \in \mathcal{L}_2^r(\mathbb{G})$$

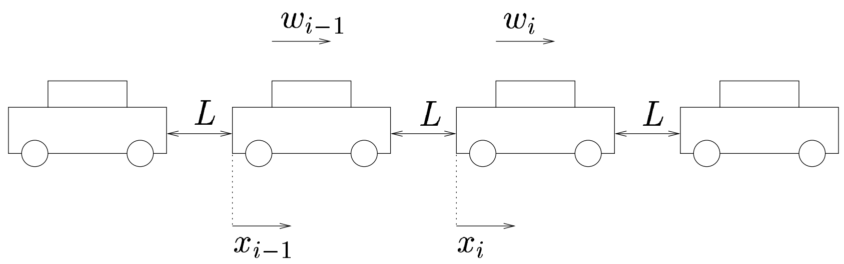
- A, B, C, D matrici di operatori invarianti per traslazione tra spazi $\mathcal{L}_2(\mathbb{G})$, tempo invarianti a coefficienti costanti
  - Derivata spaziale
  - Convoluzione
  - Traslazione spaziale
  - Combinazioni lineari
- Sensori ed attuatori completamente distribuiti sulla struttura (full actuation)
- Dinamica spazio invariante per traslazione lungo x

MODELLI DI STATO
SPAZIO INVARIANTI

- Conduzione del calore in un mezzo 1-D omogeneo infinito con controllo completamente distribuito

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) \quad ; \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

- Code di autoveicoli (linearizzato)



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_i \\ v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_i - u_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w_i - w_{i-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{G} = \mathbb{Z}$$

$$p_i = x_i - x_{i-1} - L \quad ; \quad v_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}$$

$$B = [0 \;\; I - T_{-1}]'$$

– Possibile obiettivo: $\min\limits_u J$

$$J = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty (\sigma_p p_i^2(t) + \sigma_v v_i^2(t) + \sigma_u u_i^2(t))dt$$

DIAGONALIZZAZIONE

- Modello spazio invariante

$$[Af(x)] \to^{\mathcal{F}} \hat{A}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= [A\psi](x,t) + [Bu](x,t) \\ y(x,t) &= [C\psi](x,t) + [Du](x,t) \end{aligned}$$

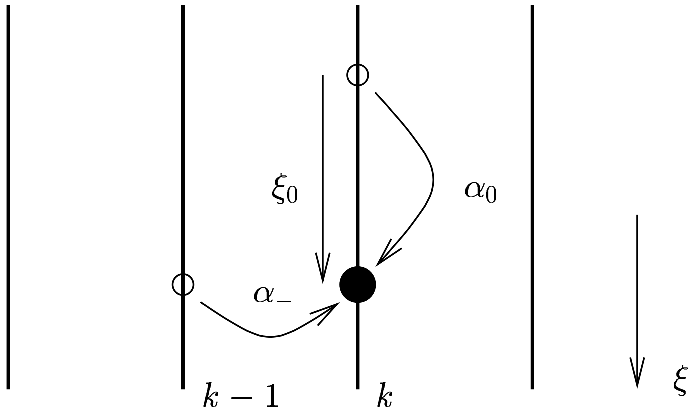
$$\Downarrow \quad \mathcal{F}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\lambda,t) &= \hat{A}(\lambda)\hat{\psi}(\lambda,t) + \hat{B}(\lambda)\hat{u}(\lambda,t) \\ \hat{y}(\lambda,t) &= \hat{C}(\lambda)\hat{\psi}(\lambda,t) + \hat{D}(\lambda)\hat{u}(\lambda,t) \end{aligned}$$

- Famiglia di sistemi LTI finito dimensionali parametrizzata dalla frequenza spaziale $\lambda \in \hat{\mathbb{G}}$

DIAGONALIZZAZIONE

- Esempio: propagazione di onde in array di di mezzi 1-D con accoppiamento



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\xi, k, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}(\xi, k, t) + \alpha_0 \psi(\xi - \xi_0, k, t) + \alpha_- \psi(\xi, k-1, t) + u(\xi, k, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \psi_1(\xi, k, t) \\ \psi_2(\xi, k, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha_0 T_{\xi_0,0} + \alpha_- T_{0,1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(\xi, k, t) \\ \psi_2(\xi, k, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\xi, k, t)$$

$$x = (\xi, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} = \mathbb{G}$$

$$\Downarrow \mathcal{F}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{\psi}_1(\omega, \theta, t) \\ \hat{\psi}_2(\omega, \theta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 + \alpha_0 e^{-j\xi_0\omega} + \alpha_- e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1(\omega, \theta, t) \\ \hat{\psi}_2(\omega, \theta, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u}(\omega, \theta, t)$$

$$\lambda = (\omega, \theta) \in \mathbb{R} \times \partial\, \mathbb{D} = \hat{\mathbb{G}}$$

STABILITÀ

- Sistema autonomo

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = [A\psi](x,t)$$

- Stabilità esponenziale

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t} \quad ; \quad e^{tA} \in C_0$$

Teorema. Il sistema è esponenzialmente stabile se e solo se per ogni $\lambda \in \hat{\mathbb{G}}$, la matrice $\hat{A}(\lambda)$ è stabile e la soluzione dell'equazione di Lyapunov

$$\hat{A}^*(\lambda)P(\lambda) + P(\lambda)\hat{A}(\lambda) = -I$$

è limitata, i.e., $\sup_{\lambda \in \hat{\mathbb{G}}} \|P(\lambda)\| < \infty$

- L'analisi di stabilità può essere condotta con tecniche finito-dimensionali (sweep su λ)
- Condizione di limitatezza verificata per sistemi fisici (dissipatività per alte frequenze spaziali)

STABILIZZABILITÀ

- Sistema con ingressi

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = [A\psi](x,t) + [Bu](x,t)$$

- Stabilizzabilità di (A, B): esiste un operatore F con opportuno dominio tale che

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = [(A+BF)\psi](x,t)$$

è esponenzialmente stabile

Teorema. Il sistema è stabilizzabile se e solo se per ogni $\lambda \in \hat{\mathbb{G}}$, la coppia $(\hat{A}(\lambda), \hat{B}(\lambda))$ è stabilizzabile e la soluzione dell'equazione di Riccati

$$\hat{A}^*(\lambda)P(\lambda) + P(\lambda)\hat{A}(\lambda) - P(\lambda)\hat{B}^*(\lambda)\hat{B}(\lambda)P(\lambda) + I = 0$$

è limitata, i.e., $\sup_{\lambda \in \hat{\mathbb{G}}} \|P(\lambda)\| < \infty$

CONTROLLO OTTIMO QUADRATICO

- Soluzione di equazioni di Riccati agli operatori [Curtain, Pritchard, 1978]
  - Soluzione complicata
  - Solo per esempi specifici

Fatto 1. La trasformata di Fourier preserva la norma $\mathcal{L}_2$

$\Rightarrow$ Un problema di controllo ottimo con obiettivo quadratico (LQ,$\mathcal{H}_2$,$\mathcal{H}_\infty$) nel dominio spaziale si trasforma in un problema analogo nel dominio di Fourier

Fatto 2. La proprietà di diagonalizzazione permette di risolvere il problema come una famiglia parametrica di problemi finito dimensionali

[Bamieh, Paganini, Dahleh, 2001]

LQR DISTRIBUITO

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = [A\psi](x,t) + [Bu](x,t)$$

- Problema standard: $\min_u J$

$$J = \int_0^\infty \langle Q\psi, \psi \rangle + \langle Ru, u \rangle \, dt$$

con

$$< \psi_1, \psi_2 >= \int_{\mathbb{G}} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx$$

  - A, B, Q, R invarianti per traslazione
  - Q, R definiti positivi
  - (A, B) stabilizzabile

- Problema equivalente

$$J = \int_{\hat{\mathbb{G}}} \left[\int_0^\infty \left(\hat{\psi}^*(\lambda,t)\hat{Q}(\lambda)\hat{\psi}(\lambda,t) + \hat{u}^*(\lambda,t)\hat{R}(\lambda)\hat{u}(\lambda,t)\right) dt\right] \, d\lambda$$

  - Disaccoppiato rispetto a λ
  - Per ogni λ fissato, è un problema LQR finito dimensionale

LQR DISTRIBUITO

- Soluzione: operatore retroazione ottima dallo stato (totalmente distribuita)

$$F = -R^{-1}B^*P$$

  dove l'operatore P è tale che il suo trasformato $P(\lambda)$ è per ogni λ la soluzione della ARE parametrica

$$\hat{A}^*(\lambda)\hat{P}(\lambda)+\hat{P}(\lambda)\hat{A}(\lambda)-\hat{P}(\lambda)\hat{B}(\lambda)\hat{R}^{-1}(\lambda)\hat{B}^*(\lambda)\hat{P}(\lambda)+\hat{Q}(\lambda) = 0$$

- P è invariante per traslazione
- Condizioni affinché P sia stabilizzante analoghe al caso finito dimensionale

- Prestazioni garantite globalmente
- Calcolo mediante famiglia di problemi di bassa dimensione

- Realizzazione della legge di controllo
  - Attuatori e sensori completamente distribuiti (OK in molti contesti, MEMS)
  - Si presta ad un'architettura distribuita?
  - Quanto è complessa? (Necessità di informazione da locazioni lontane e requisiti di comunicazione)

STRUTTURA CONTROLLORI OTTIMI

- Legge di controllo

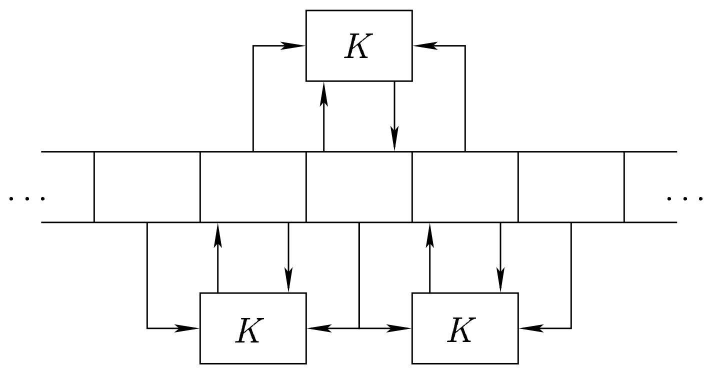
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(x,t) &= A\tilde{\psi}(x,t) + Bu(x,t) + L \star (C\psi(x,t) - C\tilde{\psi}(x,t)) \\ u(x,t) &= F \star \tilde{\psi}(x,t) \end{aligned}$$

- Stimatore distribuito: convoluzione errori di predizione in un intorno di x con il kernel di L
- Ingresso ottimo: convoluzione delle stime adiacenti con il kernel di F
  - Estensione degli intorni $\Leftrightarrow$ estensione dei kernel di L e F

$$\Downarrow$$

Architettura distribuita

- Grado di localizzazione e complessità della struttura di comunicazione dipendente dall'estensione di L e F
- Desiderata: alto grado di decentralizzazione



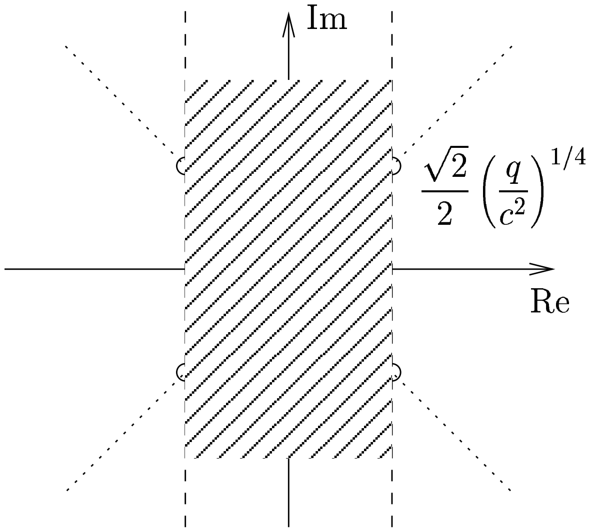
DECENTRALIZZAZIONE

- Conduzione del calore 1-D
$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t)$$
- Trasformata di Fourier
$$\frac{d\hat{\psi}(j\omega,t)}{dt} = -c\omega^2\hat{\psi}(j\omega,t) + \hat{u}(j\omega,t)$$
- LQR ($Q = qI, \quad R = I$)
$$\text{ARE}(\omega): \quad -2c\omega^2\hat{p}(j\omega) - \hat{p}^2(j\omega) + q = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\hat{p}(j\omega) = -c\omega^2 + \sqrt{c^2\omega^4 + q}$$
- $\hat{p}(j\omega)$ irrazionale in $\omega \;\Rightarrow\;$ controllo ottimo non realizzabile come PDE (localizzata)
- Soluzione: convoluzione spaziale
$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} k(x-\xi)\psi(\xi)d\xi$$
dove
$$k(x) = -p(x) \quad ; \quad p(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{p}(j\omega)\}$$
- Grado di decentralizzazione $\Leftrightarrow$ decadimento di $p(x)$

DECENTRALIZZAZIONE

- Estensione analitica

$$\hat{p}(\sigma) = c\sigma^2 + \sqrt{c^2\sigma^4 + q}$$



$$\lim_{x\to\infty} |p(x)|e^{\alpha|x|} = 0 \quad \forall\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{q}{c^2}\right)^{1/4}$$

- $k(x)$ decade esponenzialmente con $|x|$

$$\Downarrow$$

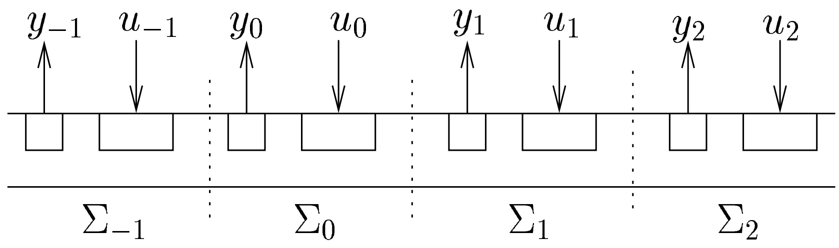
Possibile "troncamento spaziale" (controllo decentralizzato)
con prestazioni pressoché ottimali

- Generalizzazione: estensione analitica della soluzione di ARE

- Troncamento spaziale vs. troncamento modale

ATTUAZIONE PARZIALE

- Sensori/attuatori non completamente distribuiti
  $\Rightarrow$ No spazio invarianza lungo alcune direzioni



- Suddivisione in celle elementari Σ_i
  - Influenza di y_i e u_i sullo stato ψ_i di Σ_i (infinito dimensionale)
  - Condizioni al contorno

- Modello approssimato di Σ_i

$$\Downarrow$$

Modello globale spazio invariante (dominio discreto lungo la direzione di attuazione parziale)

- Nessuna approssimazione lungo le direzioni rispetto a cui il sistema è spazio invariante

PRESTAZIONI VS. COMPLESSITÀ

- Troncamento spaziale
  $\Rightarrow$ Trade-off prestazioni/grado di decentralizzazione

- Esempio

$$\lim_{x \to \infty} |k(x)| e^{\alpha |x|} = 0 \quad \forall \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{q}{c^2} \right)^{1/4}$$

  – "Cheap control" ($q \to \infty$) $\Rightarrow$ controllore ottimo totalmente decentralizzato

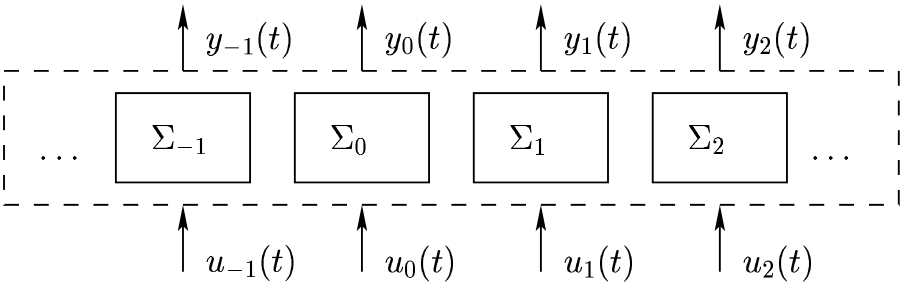
  – Minore "autorità" dell'attuatore, maggiore necessità di feedback da locazioni lontane (struttura di comunicazione complessa)

- Chiarire la relazione tra complessità del sistema e prestazioni ottenibili

- Ottimizzazione vincolata (grado di decentralizzazione/requisiti di comunicazione fissati a priori)

  – Caso di modelli spazio invarianti spazio- e tempo- discreti

SET-UP



- Modello 1-D spazio invariante TD SD ($\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \psi(i, t+1) &= [A\psi](i,t) + [Bu](i,t) \\ y(i,t) &= [C\psi](i,t) + [Du](i,t) \end{aligned}$$

- Funzione di trasferimento ($\mathcal{F} \to \mathcal{Z}$)

$$G(z,\lambda) = \hat{C}(z)(\lambda^{-1}I - \hat{A}(z))^{-1}\hat{B}(z) + \hat{D}(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \hat{g}_i(t)\lambda^t z^i$$

- Risposta all'ingresso $u_i(t)$ $\{u_i(t) \ : \ -\infty < i < +\infty, \ 0 < t < +\infty\}$

$$y_i(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau=0}^{k} \hat{g}_{i-j}(t-\tau)u_j(\tau)$$

- $G(z,\lambda)$ stabile se e solo se

$$\|G\|_1 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} |\hat{g}_i(t)| < \infty$$

SET-UP

- Norma 2

$$\|G\|_2 = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} |\hat{g}_i(t)|^2 \right]^{1/2}$$

- Norma $\mathcal{H}_2$

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2} = \left[\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(e^{j\theta}, e^{j\omega})|^2 d\omega d\theta \right]^{1/2}$$

$$\|G\|_2 = \|G\|_{\mathcal{H}_2}$$

- $G(z, \lambda)$ stabile $\Rightarrow$ mappa limitata tra funzioni $\mathcal{L}_2$

- Fattorizzazione inner-outer

$$G(z, \lambda) \text{ stabile}$$

$$\Downarrow$$

$$G(z, \lambda) = G_{\text{in}}(z, \lambda) G_{\text{out}}(z, \lambda)$$

  – $G_{\text{in}}(z, \lambda)$ isometria su $\mathcal{L}_2$

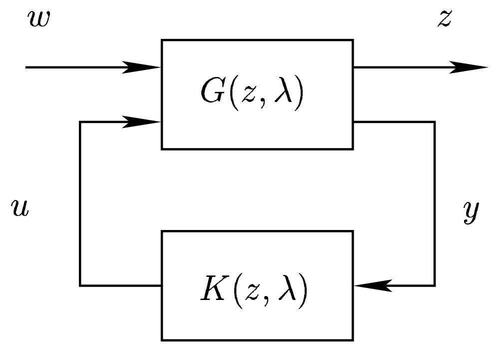
  $$G_{\text{in}}^*(e^{j\theta}, \lambda) G_{\text{in}}(e^{j\theta}, \lambda) = 1 \quad ; \quad G_{\text{in}}^*(z, \lambda) = G_{\text{in}}(z^{-1}, \lambda^{-1})$$

  – $G_{\text{out}}(z, \lambda)$ causalmente (in senso temporale) invertibile su $\mathcal{L}_2$.

Fatto. $G(z, \lambda) = G_{\text{in}}(z, \lambda) G_{\text{out}}(z, \lambda)$ si ottiene mediante fattorizzazione inner-outer del sistema "temporale" $G(z, \lambda)$ per z fissato.

CONTROLLO OTTIMO

- Problema standard



- Insieme controllori stabilizzanti (G_{22} stabile)

$$K(Q) = -Q(I - G_{22}Q)^{-1} \quad ; \quad Q \text{ stabile}$$

generalizza il caso finito dimensionale

- Problema di ottimo

$$\inf_Q \|H - UQ\| \quad ; \quad K = K(Q)$$

  – Non chiara la relazione tra grado di decentralizzazione e prestazioni

- Imporre a priori una struttura per K

$$K \in \mathcal{K}$$

  – Generalizzazione di tecniche finito-dimensionali (LMI) [D'Andrea, Dullerud, 1998-2000]. Conservativo!

VINCOLI SULLA STRUTTURA

- Problema vincolato

$$\inf_{Q} \|H - UQ\| \quad ; \quad K = K(Q) \in \mathcal{K}$$

- In generale, vincoli strutturali su K generano vincoli non convessi su Q :(

Obiettivo. Determinare condizioni sotto le quali il problema vincolato ammette una parametrizzazione convessa

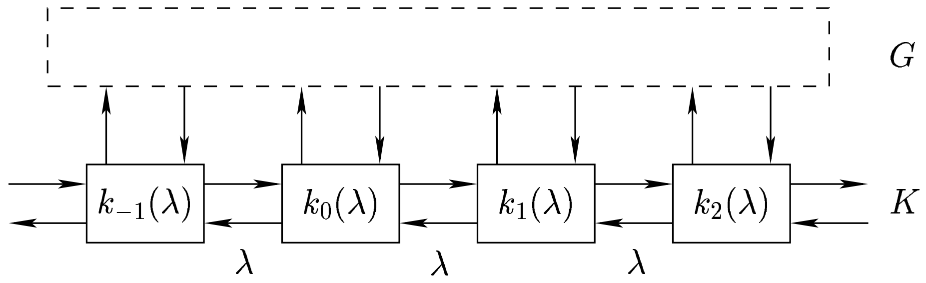
- Struttura di K
- Strutture di G
- Scelta fattorizzazione coprima

Fatto. Caso finito-dimensionale: alcune strutture di K (sistemi interconnessi) generano una parametrizzazione convessa quando G (G_{22}) ha la stessa struttura [Voulgaris, 2000].

- Estensione ai sistemi infinito-dimensionali

STRUTTURE DECENTRALIZZATE

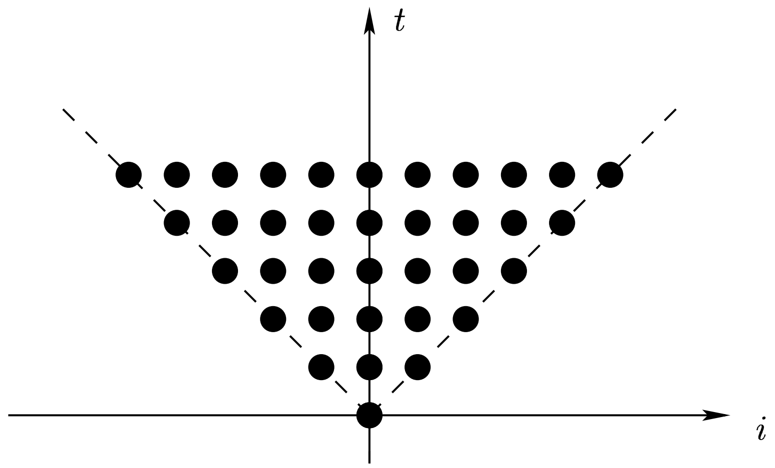
- Ogni stadio del controllore comunica solo con i primi vicini



L'informazione relativa alla stazione j è resa disponibile alla stazione i dopo $|i-j|$ passi

- "Cono-causalità" (spazio+tempo!)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{CC} &= \left\{ K(z,\lambda) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda^{|i|} \tilde{k}_i(\lambda) z^i \right\} \\
&= \left\{ K(z,\lambda) = \sum_{m=0}^{+\infty} k_m(z)\lambda^m \;\; ; \;\; k_m(z) = \sum_{i=-m}^{m} k_{m,i} z^i \right\}
\end{aligned}
$$



STRUTTURE DECENTRALIZZATE

Teorema. Sia $G_{22} \in \mathcal{CC}$ stabile. Allora tutti i $K \in \mathcal{CC}$ stabilizzanti sono dati da

$$K = -Q(I - G_{22}Q)^{-1}$$

con $Q \in \mathcal{CC}$ stabile.

- Se $G_{22} \in \mathcal{CC}$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_{-1}(t) \\ y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 & & & \\ G_1 & G_0 & & \\ G_2 & G_1 & G_0 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$G_0 \;=\; \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \dots & 0 & \hat{g}_0(0) & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{[diagonale]}$$

$$G_1 \;=\; \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \dots & 0 & \hat{g}_{-1}(0) & \hat{g}_0(1) & \hat{g}_1(0) & 0 & \dots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad [3-\text{diagonale}]$$

$$\vdots$$

$$G_i = \dots \quad [(2i+1)-\text{diagonale}]$$

STRUTTURE DECENTRALIZZATE

- Parametrizzazione controllori stabilizzanti

$$K = -Q(I - G_{22}Q)^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$K = \begin{pmatrix} K_0 & & \\ K_1 & K_0 & \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} Q_0 & & \\ Q_1 & Q_0 & \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

con K_i,Q_i operatori $(2i+1)-$diagonali

- Il vincolo di cono-causalità su K genera un vincolo convesso sul parametro di Youla Q ammesso che G_{22} sia stabile e cono-causale a sua volta [Voulgaris, Bianchini, Bamieh, 2000]

- Molte strutture d'interesse posseggono la proprietà di cono-causalità (scarsa interazione con locazioni "lontane", e.g., discretizzazione di PDE, operatori locali) :)

- Discretizzazione spaziale e temporale (approssimazione alle differenze finite)

PROBLEMA $\mathcal{H}_2$

- Problema standard

$$\begin{aligned}\mu = \inf_{Q\in\mathcal{CC}} \|H - UQ\|_2 &= \inf_{Q\in\mathcal{CC}} \|U_{\text{in}}^* H - U_{\text{out}} Q\|_2 \\ &= \inf_{R\in\mathcal{R}} \|U_{\text{in}}^* H - R\|_2\end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = \{R = U_{\text{out}} Q \quad ; \quad Q \in \mathcal{CC}\}$$

convesso infinito-dimensionale

- Rilassamento all'ordine N, i.e., ritardo di propagazione $= N$ passi quando $|i-j| \geq N$

$$\begin{aligned}\mu_N = \inf_{Q\in\mathcal{CC}_N} \|H - UQ\|_2 &= \inf_{Q\in\mathcal{CC}_N} \|U_{\text{in}}^* H - U_{\text{out}} Q\|_2 \\ &= \inf_{R\in\mathcal{R}_N} \|U_{\text{in}}^* H - R\|_2\end{aligned}$$

$$\mathcal{CC}_N = \left\{Q(z,\lambda) = Q_N(z,\lambda) + \lambda^N \tilde{Q}(z,\lambda) \ ; \ Q_N \in \mathcal{CC}\right\}$$

$$\mathcal{R}_N = \{R = U_{\text{out}} Q \quad ; \quad Q \in \mathcal{CC}_N\}$$

- Soluzione:

$$R^{\text{opt}} = \Pi_{\mathcal{H}_2(\mathcal{R}_N)}[U_{\text{in}}^* H]$$

Problema. Caratterizzare il vincolo di decentralizzazione in termini di R, i.e., trovare una base di $\mathcal{R}_N$

PROBLEMA $\mathcal{H}_2$

$$U_{\text{out}}(z,\lambda) = U_0(z) + U_1(z)\lambda + \ldots + U_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots$$

$$U_{\text{in}}^* H(z,\lambda) = \ldots + X_{-1}(z)\lambda^{-1} + X_0(z) + X_1(z)\lambda + \ldots + X_{N-1}(z)\lambda^{N-1} + \ldots$$

Teorema. $R \in \mathcal{R}_N$ ha la forma

$$R(z,\lambda) = R_0(z) + R_1(z)\lambda + \ldots + R_{N-1}(z)\lambda^{N-1} + \ldots$$

dove

$$(R_0 \quad R_1 \quad \ldots \quad R_{N-1})^T = \sum_{i=0,N-1;\quad j=-i,i} q_{i,j} V_{i,j}(z)$$

con

$$V_{i,j}(z) = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} i \\ U_0 \\ U_1 + U_0 \\ \vdots \\ U_{N-1-i} + \ldots + U_0 \end{pmatrix} z^j$$

- $q_{i,j}$ definiscono $Q(z,\lambda) \in \mathcal{CC}_N$, i.e.,

$$Q(z,\lambda) = Q_0(z) + Q_1(z)\lambda + \ldots + Q_{N-1}(z)\lambda^{N-1} + \ldots$$

$$Q_i(z) = \sum_{j=-i}^{i} q_{i,j} z^j$$

PROBLEMA $\mathcal{H}_2$

- Ottimo: sistema lineare di ordine N^2

$$A\{q_{i,j}^{\text{opt}}\} = p$$

$$A = \{< V_{i,j}, V_{h,k} >\} \quad ; \quad p = \left\{< (X_0 \;\; X_1 \;\; \ldots X_{N-1})^T, V_{i,j} >\right\}$$

Proprietà.

- L'ottimo μ_n del problema rilassato è una limitazione inferiore convergente per l'ottimo originale

$$\mu_N \leq \mu \quad ; \quad \lim_{N\to\infty} \mu_N = \mu$$

- Soluzione troncata

$$Q_N^{\text{opt}}(z,\lambda) = Q_0^{\text{opt}}(z) + Q_1^{\text{opt}}(z)\lambda + \ldots + Q_{N-1}^{\text{opt}}(z)\lambda^{N-1}$$

limitazione superiore convergente ($Q_N^{\text{opt}}(z,\lambda) \in \mathcal{CC}$!)

$$\nu_N = \|H - UQ_N^{\text{opt}}\|_2 \geq \mu \quad ; \quad \lim_{N\to\infty} \nu_N = \mu$$

[Voulgaris, Bianchini, Bamieh, 2002]

ESEMPIO

Conduzione del calore in una barra infinita (con piccole perdite)

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon y(x,t) + u(x,t)$$

- Approssimazione alle differenze finite

$$\frac{y(i,k+1) - y(i,k)}{T} = \frac{y(i+1,k) - 2y(i,k) + y(i-1,k)}{L^2}$$
$$-\varepsilon y(i,k) + u(i,k)$$

- F.d.T.

$$G(z,\lambda) = \frac{y(z,\lambda)}{u(z,\lambda)} = \frac{T\lambda}{1 - \frac{\gamma}{2}(z^{-1} + 2\alpha + z)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} T\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n-1}\left(z^{-1} + 2\alpha + z\right)^{n-1}\lambda^n$$

$$\gamma = 2T/L^2 \ \ ; \ \ \alpha = L^2/(2T) - \varepsilon L^2/2 - 1$$

- $G(z,\lambda) \in \mathcal{CC}$ e stabile per

$$\begin{cases} \gamma < 1/(1+\alpha) \\ \alpha > 1 - 1/\gamma \end{cases}$$

ESEMPIO

Problema. Attenuazione ottima $\mathcal{H}_2$ di un disturbo additivo sull'uscita con funzione di peso

$$W(z,\lambda) = \frac{\lambda}{1 - \frac{c}{2}(z^{-1} + 2a + z)}$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{Q \in \mathcal{CC}} \|(1 - GQ)W\|_2 = \min_{Q \in \mathcal{CC}} \|H - UQ\|_2$$

con

$$H(z,\lambda) = \frac{\lambda}{1 - r(z)\lambda} \quad ; \quad U(z,\lambda) = \frac{T\lambda^2}{(1-\rho(z)\lambda)(1 - r(z)\lambda)}$$

dove

$$\rho(z) = \frac{\gamma}{2}\left(z^{-1} + 2\alpha + z\right) \quad ; \quad r(z) = \frac{c}{2}\left(z^{-1} + 2a + z\right).$$

- Inner-outer

$$U_{\text{in}}(z,\lambda) = \lambda^2$$

$$\begin{aligned} U_{\text{out}}(z,\lambda) = T + T(r(z) + \rho(z))\lambda + \ldots \\ + T(r^2(z) + r(z)\rho(z) + \rho^2(z))\lambda^2 + \ldots \quad (\in \mathcal{CC}!) \end{aligned}$$

$$U_{\text{in}}^*(z,\lambda)H(z,\lambda) = \lambda^{-1} + r(z) + r^2(z)\lambda + r^3(z)\lambda^2 + \ldots$$

ESEMPIO

- Problema rilassato $N = 2$

$$q^{\text{opt}} = \begin{pmatrix} q_{0,0}^{\text{opt}} \\ q_{1,-1}^{\text{opt}} \\ q_{1,0}^{\text{opt}} \\ q_{1,1}^{\text{opt}} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} ac \\ ac^2/2 - ac\gamma/2 \\ c^2/2 - \alpha\gamma ac - ac \\ ac^2/2 - ac\gamma/2 \end{pmatrix}$$

- Soluzione troncata

$$Q_2^{\text{opt}}(z,\lambda) = q_{0,0}^{\text{opt}} + (q_{1,-1}^{\text{opt}} z^{-1} + q_{1,0}^{\text{opt}} + q_{1,1}^{\text{opt}} z)\lambda$$

N.B. $\quad U_0 \in \mathcal{CC} \quad \Rightarrow \quad R = U_0 Q \in \mathcal{CC}$

$\Rightarrow$ l'ottimo su $\mathcal{CC}$ è calcolabile esplicitamente prendendo come R^{opt} i soli termini causali dello sviluppo di $U_{\text{in}}^* H$ aventi la struttura e ricavando poi Q^{opt}

  – Caso non generico

- Soluzione ottima (senza vincoli)

$$\bar{Q}^{\text{opt}} = U_{\text{out}}^{-1} \Pi_{(\mathcal{RH}_2)}[H U_{\text{in}}^*]$$
$$= T^{-1}\tfrac{c}{2}(z^{-1} + 2a + z) - T^{-1}\tfrac{c\gamma}{4}(z^{-1} + 2a + z)(z^{-1} + 2\alpha + z)\lambda$$

ESEMPIO

Costo ottimo ($\alpha = 1, \quad \gamma = 1/3, \quad a = 1, \quad c = 1/4$)

- $N = 2$ troncata ($\in \mathcal{CC}$)

$$\nu_2 = \|H - UQ_2^{\mathrm{opt}}\| = 1.0659$$

- Ottima ($\in \mathcal{CC}$)

$$\mu = \|H - UQ^{\mathrm{opt}}\|_2 = 1.0157$$

- Ottima $\mathcal{H}_2$ ($\notin \mathcal{CC}$)

$$\bar{\mu} = \|H - U\bar{Q}^{\mathrm{opt}}\|_2 = 1$$

CONCLUSIONE

- Spazio invarianza ⇒ possibilità di trattare sistemi distribuiti in modo globale ed esatto con tecniche finito-dimensionali
  - Analisi di stabilità e proprietà strutturali
  - Progetto di controllori ottimi per obiettivi globali
    - Realizzabilità con strutture totalmente distribuite
    - Decentralizzazione intrinseca (onere computazionale e requisiti di comunicazione modesti)
- Framework generale anche per strutture “macroscopiche” e problemi con attuazione parziale
- Compromesso prestazioni-complessità
- Controllo ottimo con struttura fissata
- Da fare...
  - Estensione ad altri problemi di ottimo
  - Parametrizzazione controllori stabilizzanti
  - Analisi di altre strutture
  - Problemi di identificazione
  - ...

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Bamieh, Appunti del corso "Modeling and Control of Infinite Dimensional Systems", UC Santa Barbara, Gen-Mar 2000

[2] B. Bamieh, F. Paganini, M. Dahleh, "Distributed Control of Spatially Invariant Systems", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 2002

[3] R.F. Curtain, A.J. Pritchard, "Infinite Dimensional Linear Systems Theory", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 8, 1978

[4] R. D'Andrea, "A Linear Matrix Inequality approach to decentralized control of distributed parameter systems", *Proc. American Control Conference*, 1998

[5] R. D'Andrea, G. Dullerud, S. Lall, "Convex l_2 Synthesis for Multidimensional Systems", *Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998

[6] P. Voulgaris, "A Convex Characterization of Classes of Problems in Control with Specific Interaction and Communication Structures", UIUC Techinical Report, 2001

[7] P. Voulgaris, G. Bianchini, B. Bamieh, "Optimal Decentralized Controllers for Spatially Invariant Systems", *39th IEEE Conference on Decision and Control*, 2000

[8] P. Voulgaris, G. Bianchini, B. Bamieh, "Optimal $\mathcal{H}_2$ Controllers for Spatially Invariant Systems with Delayed Communication Requirements", *Systems and Control Letters*, 2002(?)